

Dans cette séance on va voir

- notion de matrice élémentaire
- lien entre matrices élémentaire et inversibles
- calcul des inverses  $\leadsto$  exemples ?

- d'autres descriptions d'inversibilité.

## § 7.4. Inversion d'une matrice $n \times n$

**Def. 7.9** Une matrice carrée est dite élémentaire si elle s'obtient de la matrice identité en effectuant précisément une OEL.

**Exemple 7.10\*** (i)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  est élémentaire :  $I_3 \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} A$

(ii)  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  est élémentaire :  $I_3 \xrightarrow{L_2 \leftarrow (-2) \cdot L_2} B$  &  $B' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  n'est pas élémentaire !!

(iii)  $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  est élémentaire, car  $I_3 \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 + 4L_3} C$

**RK. FONDAMENTALE** Soit  $E \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$  une matrice élémentaire. Alors :   
  $A \xrightarrow{\circ} \underbrace{E \cdot A}_{\text{produit de matrices}}$  associe à une OEL  $\circ$

(Preuve) <sup>Pour:</sup>  $\odot = (L_i \leftarrow L_i + 2L_j)$  avec  $j < i$ . Alors la matrice élémentaire associée est

$$j = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & 0 \\ & & 2 & 1 \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \quad \leftarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Alors

$$j = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & 2 & 1 \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{1,1} & \dots & A_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{j,1} & \dots & A_{j,n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{i,1} & \dots & A_{i,n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n,1} & \dots & A_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \dots & A_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{j-1,1} & \dots & A_{j-1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{i+1,1} & \dots & A_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n,1} & \dots & A_{n,n} \end{pmatrix}$$



II

$$\cancel{0 \cdot A_{1,1} + 0 \cdot A_{2,1} + \dots + 0 \cdot A_{j-1,1} + 2 \cdot A_{j,1} + 0 \cdot A_{j+1,1} + \dots + 0 \cdot A_{i-1,1}}$$

$$+ 1 \cdot A_{i,1} + 0 \cdot A_{i+1,1} + \dots + 0 \cdot A_{n,1} = 2A_{j,1} + A_{i,1}$$

et de même pour les autres coefficients de l'i-ème ligne de  $A'$ .  $\square$

Corollaire (Lemme 12) Toute matrice élémentaire est inversible.

(Preuve) Si  $O$  est  $O \in GL_n(\mathbb{R})$  et  $O^{-1}$  est l' $O \in GL_n(\mathbb{R})$  inverse, alors

$$\underbrace{F(O^{-1}) \cdot F(O) \cdot I_n}_{\text{matrice élémentaire associée à } O} = \underbrace{F(O^{-1}) \cdot F(O)}_{\substack{\text{matrice obtenue} \\ \text{en appliquant } O^{-1} \text{ à } F(O)}} = I_n$$

$$F(O) \cdot F(O^{-1}) \cdot I_n = F(O) \cdot F(O^{-1}) = \text{matrice obtenue en appliquant } O^{-1} \text{ à } F(O) = I_n$$

$$\Rightarrow \boxed{F(O)^{-1} = F(O^{-1})}$$

□

Thm. 7.12 Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$ . Alors  $A$  est inversible ssi il existe des matrices élémentaires

$F^{(1)}, \dots, F^{(p)} \in M_n(\mathbb{R})$  telles que

$$\boxed{I_n = F^{(p)} \dots F^{(1)} \cdot A} \equiv \boxed{\text{la FER de } A \text{ est } I_n!}$$

(Preuve)  $\Leftarrow$  Comme  $F^{(1)}, \dots, F^{(p)}$  sont inversibles, alors :

$$(F^{(1)})^{-1} \dots (F^{(p)})^{-1} I_n = (F^{(1)})^{-1} \dots \underbrace{(F^{(p)})^{-1} F^{(p)}}_{I_n} \dots F^{(1)} \cdot A$$

$$\Rightarrow A = \underbrace{(F^{(1)})^{-1} \dots (F^{(p)})^{-1}}_{\text{produit de matrices inversibles}} I_n \Rightarrow A \text{ est inversible}$$

(et même  $A^{-1} = \underline{F^{(p)} \dots F^{(1)}}$ ).

$\Rightarrow$ ) Lire les notes □

# Calcul de $A^{-1}$

En deux mots (pour  $A \in M_n(\mathbb{R})$  inversible):

n lignes  $\{ [A : I_n] \xrightarrow{\text{FER}} [I_n : A^{-1}] \}$   
 2 n colonnes

Exemple 7.14 On va montrer que  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 8 \end{pmatrix}$  est inversible et on va calculer  $A^{-1}$ .

$$[A : I_3] = \left( \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & 0 & -4 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - L_3} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -3 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow \frac{L_3}{2}} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -3 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 & -2 & 1/2 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - L_3} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -9/2 & 7 & -3/2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 & -2 & 1/2 \end{array} \right) \leftarrow A^{-1}?$$

(Preuve de la méthode) Comme  $A$  est inversible, alors  $I_n = F^{(p)} \dots F^{(1)} A$  (avec  $F^{(1)}, \dots, F^{(p)}$  des matrices élémentaires)

alors  $\underbrace{F^{(p)} \dots F^{(1)}}_{A^{-1}} \cdot [A : I_n] \xrightarrow[\substack{\text{OEL} \\ \text{associées} \\ \text{à } F^{(1)}, \dots, F^{(p)}}]{\substack{\text{OEL} \\ \text{associées} \\ \text{à } F^{(1)}, \dots, F^{(p)}}} \left[ \underbrace{F^{(p)} \dots F^{(1)} A}_{I_n} : \underbrace{F^{(p)} \dots F^{(1)} I_n}_{A^{-1}} \right] = [I_n : A^{-1}]$   $\square$

Thm 7.15\* (sans items (h), (i)) Par  $A \in M_n(\mathbb{R})$ , les cond. suivantes sont équivalentes

- (a)  $A$  est inversible;
- (b)  $A$  est un produit (fini) de matrices élémentaires;
- (c) la FER de  $A$  est  $I_n$ ;
- (d)  $\forall \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ , le SEL  $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$  est compatible déterminé;
- (e) le SEL  $A \cdot \vec{x} = 0$  n'a pas de solution non triviale;
- (f) les colonnes de  $A$  forment un ensemble libre;
- (g) les colonnes de  $A$  engendrent  $\mathbb{R}^n$ .

(Preuve) Voir les notes.  $\square$

↓ Dans cette séance on va voir:

- (i) Une simplification dans la définition d'inversibilité;
- (ii) un rappel de la définition de déterminant  $2 \times 2$ ;
- (iii) la définition générale du déterminant  $n \times n \rightarrow$  calcul récursif ?
- (iv) quelques propriétés du déterminant (transposition, OEL, ...)

(08.10.2024)